

# L01: Funktionen

BSc Analysis

Digital Finance

- 1 Grundbegriffe
- 2 Elementare Funktionen
- 3 Funktionseigenschaften
- 4 Operationen auf Funktionen
- 5 Injektivitaet, Surjektivitaet, Bijektivitaet
- 6 Anwendungen

Am Ende dieser Lektion koennen Sie:

1. Den **Funktionsbegriff** praezise definieren und verschiedene Darstellungsformen unterscheiden.
2. Die wichtigsten **elementaren Funktionen** (Polynome, Exponential-, Logarithmus-, trigonometrische Funktionen) und ihre Eigenschaften beschreiben.
3. **Funktionseigenschaften** wie Nullstellen, Stetigkeit, Monotonie und Grenzwerte analysieren.
4. **Operationen auf Funktionen** (Addition, Multiplikation, Verkettung) durchfuehren.
5. Die Begriffe **Injektivitaet, Surjektivitaet und Bijektivitaet** erklaren und auf Beispiele anwenden.
6. Funktionen in **Anwendungskontexten** (Wachstum, Optimierung, Schwingungen) einsetzen.

---

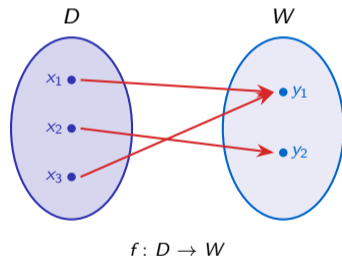
Diese Lernziele bilden die Grundlage fuer alle weiteren Kapitel der Analysis.

## Definition

Eine **Funktion**  $f: D \rightarrow W$  ist eine Vorschrift, die jedem Element  $x \in D$  **genau ein** Element  $y = f(x) \in W$  zuordnet.

### Begriffe:

- $D =$  **Definitionsbereich** (Menge der zulässigen  $x$ )
- $W =$  **Wertebereich** (Zielmenge)
- $f(D) = \{f(x) \mid x \in D\} =$  **Bildmenge**
- $x =$  **Argument**,  $f(x) =$  **Funktionswert**



**Entscheidend:** Jedes  $x \in D$  hat *genau einen* Funktionswert – nicht keinen, nicht mehrere.

Die Eindeutigkeit der Zuordnung ist das zentrale Merkmal einer Funktion.

# Darstellungsformen von Funktionen

## Analytisch (Formel)

$$f(x) = x^2$$

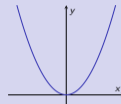
Kompakt, exakt, gut zum Rechnen.

## Tabellarisch

x	f(x) = x <sup>2</sup>
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

Nur endlich viele Werte.

## Grafisch



Anschaulich, zeigt Verlauf.

## Darstellungsformen einer Funktion: $f(x) = x^2$

### Analytisch

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

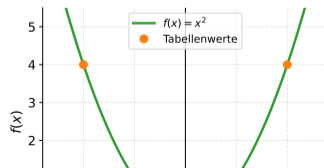
$$f(x) = x^2$$

Definitionsbereich:  
 $D = \mathbb{R}$

### Tabellarisch

x	f(x) = x <sup>2</sup>
-2	4
-1	1
0	0
1	1

### Grafisch



## Funktionswerte berechnen

**Gegeben:**  $f(x) = x^2$

### Konkrete Werte

$$f(3) = 3^2 = 9$$

$$f(-1) = (-1)^2 = 1$$

$$f(0) = 0^2 = 0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

### Symbolische Werte

$$f(a) = a^2$$

$$\begin{aligned} f(a+h) &= (a+h)^2 \\ &= a^2 + 2ah + h^2 \end{aligned}$$

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2$$

### Differenzenquotient

$$\begin{aligned} &\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \frac{(a^2 + 2ah + h^2) - a^2}{h} \\ &= \frac{2ah + h^2}{h} = 2a + h \end{aligned}$$

**Beobachtung:**  $f(-x) = f(x)$  – die Funktion  $x^2$  ist **gerade** (symmetrisch zur y-Achse).

Der Differenzenquotient ist die Vorstufe zur Ableitung (Lektion 2).

**Frage:** Fuer welche  $x$  ist  $f(x)$  definiert? Welche Werte werden angenommen?

Funktion	Definitionsbereich $D$	Wertebereich $f(D)$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$[0, \infty)$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \frac{1}{x-2}$	$\mathbb{R} \setminus \{2\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \ln(x)$	$(0, \infty)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{4-x^2}$	$[-2, 2]$	$[0, 2]$

**Regeln fuer den maximalen Definitionsbereich:**

- Nenner  $\neq 0$  (Division durch Null ausgeschlossen)
- Radikand  $\geq 0$  (bei geraden Wurzeln)
- Argument  $> 0$  (bei Logarithmus)

## Kostenfunktion eines Unternehmens

$$C(x) = 500 + 3x + 0,01x^2$$

wobei  $x$  = produzierte Stueckzahl und  $C(x)$  = Gesamtkosten in CHF.

### Bestandteile:

- 500 = **Fixkosten** (unabhaengig von  $x$ )
- $3x$  = **variable Kosten** (linear)
- $0,01x^2$  = **ueberproportionale Kosten**

### Berechnungen:

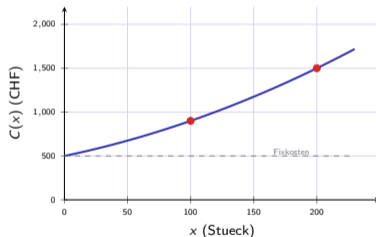
$$C(0) = 500 \text{ CHF (Fixkosten)}$$

$$C(100) = 500 + 300 + 100 = \mathbf{900} \text{ CHF}$$

$$C(200) = 500 + 600 + 400 = \mathbf{1500} \text{ CHF}$$

$$\text{Stueckkosten: } \bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{500}{x} + 3 + 0,01x$$

Kostenfunktionen sind ein zentrales Anwendungsgebiet der Analysis in den Wirtschaftswissenschaften.



## Definition

Ein **Polynom** vom Grad  $n$  hat die Form:  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $a_n \neq 0$

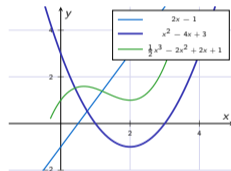
**Lineare Funktion** ( $n = 1$ ):  $f(x) = mx + b$

- $m$  = Steigung,  $b$  =  $y$ -Achsenabschnitt
- Beispiel:  $f(x) = 2x - 1$

**Quadratische Funktion** ( $n = 2$ ):  $f(x) = ax^2 + bx + c$

- Parabel, offen nach oben ( $a > 0$ ) oder unten ( $a < 0$ )
- Scheitelpunkt:  $x_S = -\frac{b}{2a}$
- Beispiel:  $f(x) = x^2 - 4x + 3$ , Scheitel bei  $(2, -1)$

**Kubische Funktion** ( $n = 3$ ): z. B.  $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 2x + 1$  – bis zu 2 Wendestellen.



Polynome sind auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert, stetig und beliebig oft differenzierbar.

# Nullstellen von Polynomen

**Nullstelle:**  $x_0$  mit  $p(x_0) = 0$ . Ein Polynom vom Grad  $n$  hat **höchstens**  $n$  reelle Nullstellen.

## Quadratische Gleichung ( $n = 2$ )

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

**Diskriminante:**  $\Delta = b^2 - 4ac$

- $\Delta > 0$ : zwei reelle Nullstellen
- $\Delta = 0$ : eine doppelte Nullstelle
- $\Delta < 0$ : keine reelle Nullstelle

## Beispiel

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 1$$

**Faktorisierung:**

$$f(x) = (x - 1)(x - 3)$$

**Höhere Grade:** Polynomdivision, Substitution, oder numerische Verfahren.

## Definition

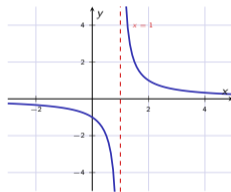
$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ , wobei  $p$  und  $q$  Polynome sind,  $q \neq 0$ .

**Beispiel:**  $f(x) = \frac{1}{x-1}$

- $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- **Polstelle** bei  $x = 1$  (Nenner = 0)
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$
- Horizontale Asymptote:  $y = 0$

**Weiteres Beispiel:**  $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1} = x - 1$  fuer  $x \neq -1$

$\Rightarrow$  Hier ist  $x = -1$  eine **hebbare Luecke**, keine Polstelle.



Polstellen entstehen dort, wo der Nenner Null wird und der Zaehler nicht ebenfalls Null ist.

**Potenzfunktionen:**  $f(x) = x^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$

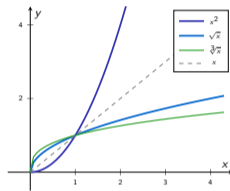
- $n > 0$ : Polynomfunktion
- $n < 0$ :  $f(x) = x^{-|n|} = \frac{1}{x^{|n|}}$ ,  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $n$  gerade:  $f(-x) = f(x)$  (gerade Funktion)
- $n$  ungerade:  $f(-x) = -f(x)$  (ungerade Funktion)

**Wurzelfunktionen:**  $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$

- $n$  gerade:  $D = [0, \infty)$
- $n$  ungerade:  $D = \mathbb{R}$

**Allgemein:**  $f(x) = x^r$ ,  $r \in \mathbb{Q}$

$$x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p} = (\sqrt[q]{x})^p$$



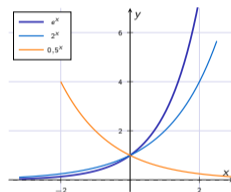
$\sqrt{x}$  und  $x^2$  sind zueinander **invers** auf  $[0, \infty)$  – Spiegelung an  $y = x$ .

## Definition

$f(x) = a^x$  mit Basis  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ . Wichtigster Spezialfall:  $f(x) = e^x$  mit  $e \approx 2,71828 \dots$

## Eigenschaften von $e^x$ :

- $D = \mathbb{R}$ ,  $f(\mathbb{R}) = (0, \infty)$
- Streng monoton steigend
- $e^0 = 1$ ,  $e^1 = e \approx 2,718$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  (Asymptote  $y = 0$ )
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
- Stets  $e^x > 0$  (nie Null!)



## Rechenregeln:

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$a > 1$ : Wachstum.  $0 < a < 1$ : Zerfall.

Die Eulersche Zahl  $e$  ist die einzige Basis, bei der die Ableitung gleich der Funktion selbst ist:  $(e^x)' = e^x$ .

## Definition

$\log_a(x) = y \iff a^y = x$ . Der Logarithmus ist die **Umkehrfunktion** der Exponentialfunktion.

**Natuerlicher Logarithmus:**  $\ln(x) = \log_e(x)$

- $D = (0, \infty)$ ,  $f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}$
- $\ln(1) = 0$ ,  $\ln(e) = 1$
- Streng monoton steigend
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$  (aber langsam!)

**Rechenregeln:**

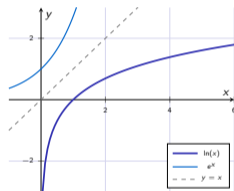
$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

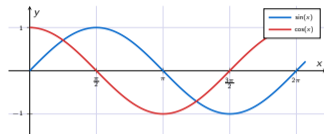
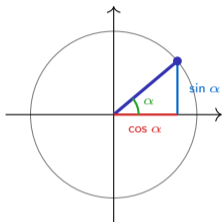
$$\ln(x^r) = r \cdot \ln(x)$$

**Basiswechsel:**  $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

**Merke:**  $\ln(e^x) = x$  und  $e^{\ln(x)} = x$  – diese Identitaeten sind fundamental.



$\ln(x)$  und  $e^x$  sind zueinander invers: Spiegelung an  $y = x$ .



## Einheitskreis:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

## Sinus:

- Periode  $2\pi$
- $\sin(0) = 0$ ,  $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$
- Ungerade:  $\sin(-x) = -\sin(x)$

## Cosinus:

- Periode  $2\pi$
- $\cos(0) = 1$ ,  $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$
- Gerade:  $\cos(-x) = \cos(x)$

## Tangens:

- $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
- Periode  $\pi$
- $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$

## Wichtige Funktionswerte

$x$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	-

## Wichtige Identitäten

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

## Definition

Sei  $f: D \rightarrow W$  **bijektiv**. Dann existiert die **Umkehrfunktion**  $f^{-1}: W \rightarrow D$  mit:

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{und} \quad f(f^{-1}(y)) = y$$

Funktion $f$	Umkehrfunktion $f^{-1}$	Einschränkung
$f(x) = e^x$	$f^{-1}(x) = \ln(x)$	$f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$
$f(x) = x^2$	$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$	$f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$
$f(x) = x^3$	$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$	$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$	$f^{-1}(x) = \arcsin(x)$	$f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$
$f(x) = 2x + 3$	$f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$	$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

**Grafisch:** Der Graph von  $f^{-1}$  ist die **Spiegelung** des Graphen von  $f$  an der Geraden  $y = x$ .

**Achtung:**  $f^{-1}$  ist *nicht*  $\frac{1}{f(x)}$ ! Es gilt  $f^{-1} \neq f^{(-1)}$ .

Eine Umkehrfunktion existiert genau dann, wenn  $f$  bijektiv (= injektiv + surjektiv) ist.

## Definition

$x_0$  ist eine **Nullstelle** von  $f$ , wenn  $f(x_0) = 0$ .

### Berechnung fuer verschiedene Typen:

- **Linear:**  $mx + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{m}$
- **Quadratisch:**  $p$ - $q$ -Formel oder  $abc$ -Formel
- **Exponentiell:**  $e^x = 0$  hat **keine** Loesung!
- **Logarithmisch:**  $\ln(x) = 0 \Rightarrow x = 1$
- **Trigonometrisch:**  $\sin(x) = 0 \Rightarrow x = k\pi$

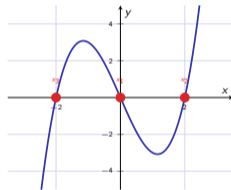
**Beispiel:**  $f(x) = x^3 - 4x$

$$x^3 - 4x = 0$$

$$x(x^2 - 4) = 0$$

$$x(x - 2)(x + 2) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -2$$



**Grafisch:** Nullstellen = Schnittpunkte des Graphen mit der  $x$ -Achse.

## Polstelle

$x_0$  ist eine **Polstelle** von  $f$ , wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \infty$$

**Beispiel:**  $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$

- Polstelle bei  $x = 2$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$

**Grenzwertregel fuer rationale Funktionen:** Bei  $\frac{p(x)}{q(x)}$  mit  $\deg(p) = n$ ,  $\deg(q) = m$ :  $n < m \Rightarrow 0$ ,  $n = m \Rightarrow \frac{a_n}{b_m}$ ,  $n > m \Rightarrow \pm\infty$ .

Grenzwerte sind die Grundlage fuer Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

## Grenzwerte

**An einer Stelle:**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

Fuer jedes  $\varepsilon > 0$  existiert  $\delta > 0$ , sodass:

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

**Im Unendlichen:**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 5} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

## Definition

$f$  ist **stetig** in  $x_0$ , wenn:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Drei Bedingungen muessen gleichzeitig gelten:

1.  $f(x_0)$  ist definiert.
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existiert.
3.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

## Stetige Funktionen:

- Alle Polynome
- $e^x$ ,  $\ln(x)$  (auf  $D$ ),  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$
- Summen, Produkte, Verkettungen stetiger Funktionen
- Gebrochenrationale Funktionen (auf  $D$ )

## Unstetige Funktionen – Beispiele:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$  Sprungstelle bei  $x = 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

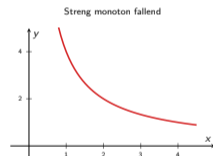
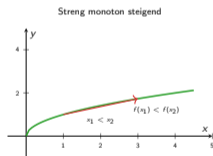
$g(x) = \frac{1}{x}$ : stetig auf  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , aber *unstetig fortsetzbar* an  $x = 0$ .

**Intuition:** Eine stetige Funktion kann man zeichnen, ohne den Stift abzusetzen.

## Definition

$f$  ist auf einem Intervall  $I$ :

- **streng monoton steigend**, wenn  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- **streng monoton fallend**, wenn  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$



## Beispiele:

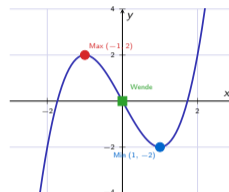
- $e^x$ : streng monoton steigend auf  $\mathbb{R}$
- $\ln(x)$ : streng monoton steigend auf  $(0, \infty)$
- $x^2$ : fallend auf  $(-\infty, 0]$ , steigend auf  $[0, \infty)$
- Konstante Funktion: monoton (aber nicht streng)

## Extremstellen

- **Lokales Maximum** in  $x_0$ :  $f(x) \leq f(x_0)$  fuer alle  $x$  nahe  $x_0$
- **Lokales Minimum** in  $x_0$ :  $f(x) \geq f(x_0)$  fuer alle  $x$  nahe  $x_0$
- **Globales Maximum/Minimum**: auf ganz  $D$

**Beispiel:**  $f(x) = x^3 - 3x$

- Lokales Maximum bei  $x = -1$ :  $f(-1) = 2$
- Lokales Minimum bei  $x = 1$ :  $f(1) = -2$
- Kein globales Extremum (unbeschaenkt)



## Wendestelle

Punkt, an dem die **Kruemmung** wechselt (von Links- zu Rechtskruemmung oder umgekehrt).

$f(x) = x^3 - 3x$ : Wendestelle bei  $x = 0$ .

## Typen von Asymptoten

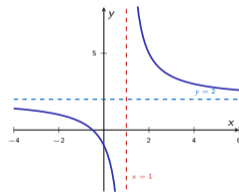
- **Horizontale Asymptote:**  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = c \Rightarrow$  Asymptote  $y = c$
- **Vertikale Asymptote:**  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \infty \Rightarrow$  Asymptote  $x = x_0$
- **Schraege Asymptote:**  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0 \Rightarrow$  Asymptote  $y = mx + b$

**Beispiel:**  $f(x) = \frac{2x + 1}{x - 1}$

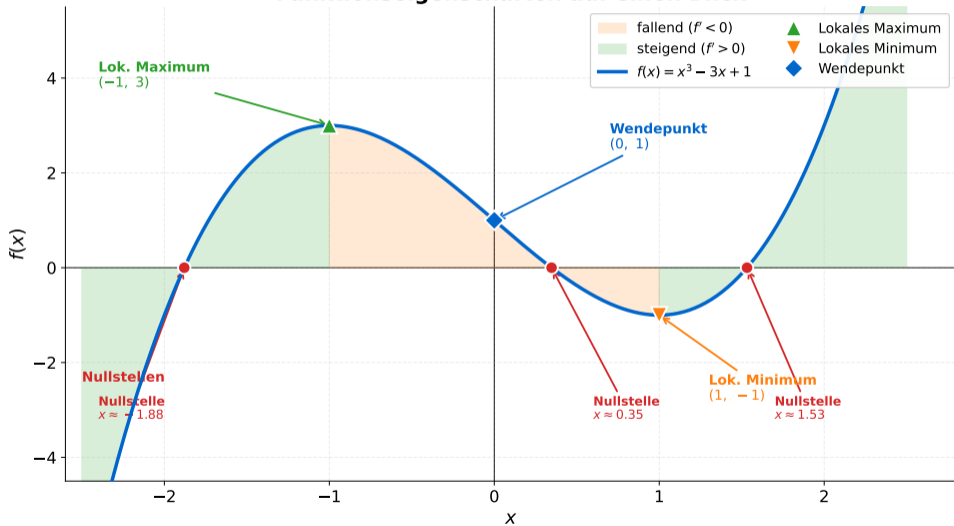
- Vertikale Asymptote:  $x = 1$
- Polynomdivision:  $f(x) = 2 + \frac{3}{x-1}$
- Horizontale Asymptote:  $y = 2$

**Beispiel:**  $g(x) = \frac{x^2 + 1}{x} = x + \frac{1}{x}$

- Vertikale Asymptote:  $x = 0$
- Schraege Asymptote:  $y = x$



## Funktionseigenschaften auf einen Blick



# Addition und Multiplikation von Funktionen

Seien  $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Funktionen.

## Addition

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

**Beispiel:**  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = 2x$

$$(f + g)(x) = x^2 + 2x$$

## Subtraktion

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f - g)(x) = x^2 - 2x$$

## Multiplikation

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

**Beispiel:**

$$(f \cdot g)(x) = x^2 \cdot 2x = 2x^3$$

## Division

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2}, \quad x \neq 0$$

**Definitionsbereich:**  $D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$ ,  $D_{f/g} = D_f \cap D_g \setminus \{x : g(x) = 0\}$

## Definition

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$  – zuerst  $g$ , dann  $f$  anwenden.

**Beispiel 1:**  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = x + 1$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2$$

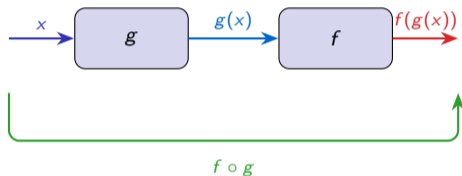
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$$

$\Rightarrow f \circ g \neq g \circ f$  im Allgemeinen!

**Beispiel 2:**  $f(x) = e^x$ ,  $g(x) = 2x$

$$(f \circ g)(x) = e^{2x}$$

$$(g \circ f)(x) = 2e^x$$



**Definitionsbereich:**

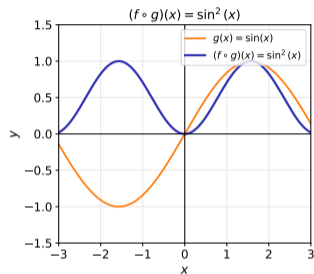
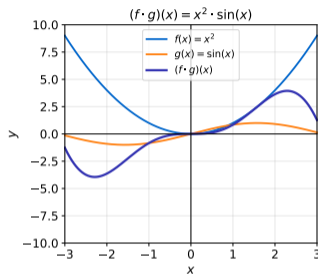
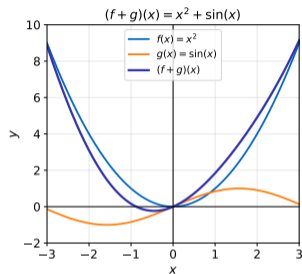
$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}$$

**Beispiel:**  $f(x) = \ln(x)$ ,  $g(x) = 1 - x^2$

$$D_{f \circ g} = \{x : 1 - x^2 > 0\} = (-1, 1)$$

Die Verkettung ist zentral fuer die Kettenregel der Differentialrechnung (Lektion 2).

## Operationen auf Funktionen



### Verschiebung:

- $f(x) + c$ : um  $c$  nach **oben**
- $f(x - c)$ : um  $c$  nach **rechts**

### Streckung/Stauchung:

- $c \cdot f(x)$ : vertikal mit Faktor  $c$
- $f(c \cdot x)$ : horizontal mit Faktor  $\frac{1}{c}$

### Spiegelung:

- $-f(x)$ : Spiegelung an der  $x$ -Achse
- $f(-x)$ : Spiegelung an der  $y$ -Achse

### Betrag:

- $|f(x)|$ : negative Teile nach oben klappen

**Konkretes Beispiel:** Aus  $f(x) = x^2$  wird durch  $g(x) = 2(x-3)^2 + 1$ :

# Injektivitaet, Surjektivitaet, Bijektivitaet

## Injektiv (eineindeutig)

$$f(x_1) = f(x_2) \\ \Rightarrow x_1 = x_2$$

Verschiedene Argumente haben **verschiedene** Funktionswerte.

**Test:** Jede horizontale Linie schneidet den Graphen **hoechstens einmal**.

## Surjektiv (auf)

$$\forall y \in W \exists x \in D : \\ f(x) = y$$

Jedes Element der Zielmenge wird **getroffen**.

**Test:** Jede horizontale Linie (in  $W$ ) schneidet den Graphen **mindestens einmal**.

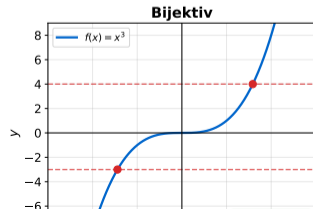
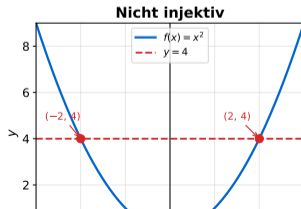
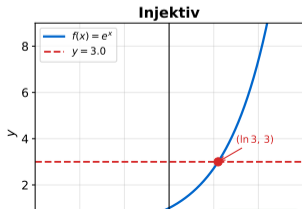
## Bijektiv

Injektiv **und** surjektiv.

Jedes  $y \in W$  hat **genau ein** Urbild.

**Test:** Jede horizontale Linie schneidet den Graphen **genau einmal**.

## Injektivitaet und Bijektivitaet



## Beispiele: Injektiv, Surjektiv, Bijektiv

Funktion	$D \rightarrow W$	Inj.	Surj.	Bij.
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(-2) = f(2) = 4$ ; $y = -1$ nicht erreicht	Nein	Nein	Nein
$f(x) = x^2$	$[0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ Einschraenkung macht bijektiv!	Ja	Ja	Ja
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton, aber $y \leq 0$ nie erreicht	Ja	Nein	Nein
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$	Ja	Ja	Ja
$f(x) = x^3$	$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	Ja	Ja	Ja
$f(x) = \sin(x)$	$\mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ periodisch, nicht injektiv	Nein	Ja	Nein
$f(x) = \sin(x)$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$	Ja	Ja	Ja

**Schlussfolgerung:** Durch geeignete **Einschraenkung** von  $D$  und  $W$  kann man viele Funktionen bijektiv machen – Voraussetzung fuer die Existenz einer Umkehrfunktion.

Bijektivitaet ist die notwendige und hinreichende Bedingung fuer die Existenz von  $f^{-1}$ .

## Allgemeines Modell

$$K(t) = K_0 \cdot e^{rt}$$

$K_0$  = Anfangswert,  $r$  = Wachstumsrate ( $r > 0$ : Wachstum,  $r < 0$ : Zerfall),  $t$  = Zeit.

### Zinseszins:

- Kapital  $K_0 = 10\,000$  CHF, Zinssatz  $r = 0,05$
- $K(t) = 10\,000 \cdot e^{0,05t}$
- Nach 10 Jahren:  $K(10) = 10\,000 \cdot e^{0,5} \approx 16\,487$  CHF

### Verdopplungszeit:

$$e^{rT} = 2 \Rightarrow T = \frac{\ln 2}{r} = \frac{0,693}{0,05} \approx 13,9 \text{ Jahre}$$

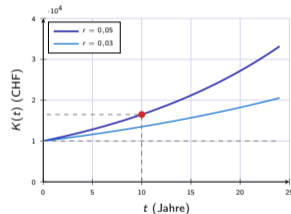
### Halbwertszeit (Zerfall, $r < 0$ ):

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{|r|}$$

Beispiel: Radioaktiver Zerfall mit  $r = -0,1$ :

$$T_{1/2} = \frac{0,693}{0,1} \approx 6,93 \text{ Zeiteinheiten}$$

Exponentielles Wachstum ist das wichtigste Modell in der Finanzmathematik.



## Gegeben:

- Preis-Absatz-Funktion:  $p(x) = 100 - 0,5x$
- Kostenfunktion:  $C(x) = 500 + 20x + 0,1x^2$

## Erloesfunktion:

$$E(x) = x \cdot p(x) = 100x - 0,5x^2$$

## Gewinnfunktion:

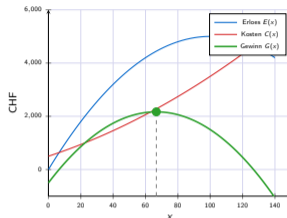
$$\begin{aligned}G(x) &= E(x) - C(x) \\&= 100x - 0,5x^2 - 500 - 20x - 0,1x^2 \\&= -0,6x^2 + 80x - 500\end{aligned}$$

## Maximum: (Scheitel der Parabel)

$$x^* = -\frac{80}{2 \cdot (-0,6)} = \frac{80}{1,2} \approx 66,7 \text{ Stueck}$$

$$G(x^*) \approx -0,6(66,7)^2 + 80(66,7) - 500 \approx 2166,7 \text{ CHF}$$

Gewinnmaximierung = Kernproblem der Betriebswirtschaft, gelöst durch Analysis (Lektion 2).



## Harmonische Schwingung

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$A$  = Amplitude,  $\omega$  = Kreisfrequenz,  $\varphi$  = Phasenverschiebung,  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  = Periode.

### Beispiel: Federpendel

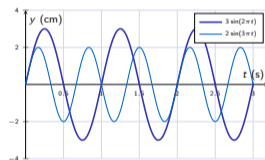
- $A = 3 \text{ cm}$ ,  $\omega = 2\pi$  (1 Schwingung/s)
- $y(t) = 3 \sin(2\pi t)$
- Periode:  $T = 1 \text{ s}$
- Frequenz:  $f = \frac{1}{T} = 1 \text{ Hz}$

### Ueberlagerung:

$$y(t) = A_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \sin(\omega_2 t)$$

erzeugt **Schwebung** bei ähnlichen Frequenzen.

**Anwendungen:** Wechselstrom, Akustik, Seismologie, Signalverarbeitung.



## Erreichte Lernziele

1. ✓ **Funktionsbegriff:** Definition als eindeutige Zuordnung  $f: D \rightarrow W$ , Darstellungsformen (analytisch, tabellarisch, grafisch).
2. ✓ **Elementare Funktionen:** Polynome, Exponential-, Logarithmus-, trigonometrische, gebrochenrationale Funktionen und ihre Eigenschaften.
3. ✓ **Funktionseigenschaften:** Nullstellen, Polstellen, Grenzwerte, Stetigkeit, Monotonie, Extrema, Asymptoten.
4. ✓ **Operationen:** Addition, Multiplikation, Verkettung  $f \circ g$  und deren grafische Auswirkungen.
5. ✓ **Injektivitaet, Surjektivitaet, Bijektivitaet:** Definitionen, Horizontallinientest, Zusammenhang mit Umkehrfunktionen.
6. ✓ **Anwendungen:** Exponentielles Wachstum/Zerfall, Gewinnmaximierung, Schwingungen.

## Naechste Lektion: L02 – Differentialrechnung

Ableitungsbegriff • Ableitungsregeln • Kurvendiskussion • Optimierung

---

Funktionen sind das Fundament der gesamten Analysis – sie werden uns durch alle Lektionen begleiten.